

۱- گزینه ۳ صحیح است.

ریشه‌های پنجم عدد ۱ در فرم قطبی عدد موردنظر را می‌توان تعیین کرد.

$$w_k = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{e^{2k\pi i}} = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

که به ازای $k = 0$ ریشه حقیقی اتفاق می‌افتد و برای سایر مقادیر k ریشه‌های غیر حقیقی اتفاق می‌افتد.

$$w_1^3 + w_2^3 + w_3^3 + w_4^3 = (e^{\frac{2\pi i}{5}})^3 + (e^{\frac{4\pi i}{5}})^3 + (e^{\frac{6\pi i}{5}})^3 + (e^{\frac{8\pi i}{5}})^3 = e^{\frac{6\pi i}{5}} + e^{\frac{12\pi i}{5}} + e^{\frac{18\pi i}{5}} + e^{\frac{24\pi i}{5}}$$

جملات فوق تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $e^{\frac{6\pi i}{5}}$ داده‌اند.

$$S = \frac{e^{\frac{6\pi i}{5}} (1 - e^{\frac{4 \times 6\pi i}{5}})}{1 - e^{\frac{6\pi i}{5}}} = \frac{e^{\frac{6\pi i}{5}} (1 - e^{(\frac{24\pi}{5} + \frac{\pi}{5})i})}{1 - e^{\frac{6\pi i}{5}}} = \frac{e^{\frac{6\pi i}{5}} - e^{\frac{25\pi i}{5}}}{1 - e^{\frac{6\pi i}{5}}} = -1$$

۲- گزینه ۳ درست است.

$$P = z_0 \times z_1 \times z_2 \times z_3 \times \dots \xrightarrow{\ln} \ln p = \sum_{k=0}^{\infty} \ln z_k$$

$$z_n = e^{i(\frac{\pi-2}{\pi})^n} \xrightarrow{\ln} \ln z_n = i(\frac{\pi-2}{\pi})^n$$

$$\Rightarrow \ln p = \sum_{k=0}^{\infty} i(\frac{\pi-2}{\pi})^k = i \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\pi-2}{\pi})^k \xrightarrow{q=\frac{\pi-2}{\pi} < 1} \ln p = i \left(\frac{1}{1 - \frac{\pi-2}{\pi}} \right) = \frac{\pi}{2} i$$

$$\Rightarrow p = e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا باتوجه به ضرایب عددی، جملات را دسته‌بندی کرده و با فاکتورگیری ساده می‌کنیم.

$$A = 1 + z + z^2 + z^3 + \Delta z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + \Delta z^9$$

$$A = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) + (z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + z^8) + \Delta z^9$$

$$A = 1 + \dots + z^4 + (4z^4)(1 + \dots + z^4) + \Delta z^9 = (1 + 4z^4)(1 + \dots + z^4) + \Delta z^9$$

$$\longrightarrow A = (1 + 4z^4) \left(\frac{(1)(1 - z^5)}{1 - z} \right) + \Delta z^9$$

چون $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ است پس $z^5 = e^{2\pi i} = \cos 2\pi i + i \sin 2\pi i = 1$ می‌شود پس حاصل کسر اول صفر است.

$$A = \Delta z^9 = \Delta (e^{\frac{2\pi i}{5}})^9 = \Delta (e^{\frac{18\pi i}{5}}) = \Delta (e^{\frac{3\pi i}{5}})$$

چون $e^{3\pi i} = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = -1$ پس حاصل $A = -\Delta e^{\frac{3\pi i}{5}}$ خواهد بود.

۴- گزینه ۴ صحیح است.

با تعریف $Z = re^{i\theta}$ که در آن $\bar{Z} = re^{-i\theta}$ خواهد بود، داریم:

$$Z^3 = \bar{Z}^2 \Rightarrow r^3 e^{3i\theta} = r^2 e^{-2i\theta} \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow z = 0 \quad (۱) \\ r = 1 \Rightarrow e^{5i\theta} = 1 = e^{i(0)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\theta = 0 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5}, k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (۵)$$

یک جواب در حالت اول و ۵ جواب در حالت دوم داریم. پس معادله در کل ۶ جواب دارد.

۵- گزینه ۱ صحیح است.

با حا معادله $z^5 = 1$ یا $z = \sqrt[5]{1}$ ، ابتدا مقادیر ممکن z را تعیین می‌کنیم.

$$z = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{e^{i(0)}} = e^{i(\frac{0+2k\pi}{5})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \xrightarrow{z \neq 1} k \neq 0$$

حال مقدار حاصل جمع مطلوب را با انتخاب یکی از مقادیر k به دلخواه (مثلاً $k = 1$) $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ محاسبه می‌کنیم.

$$A = 1 + \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{5}}} + \frac{1}{e^{\frac{4\pi i}{5}}} + \frac{1}{e^{\frac{6\pi i}{5}}} + \frac{1}{e^{\frac{8\pi i}{5}}} = 1 + e^{-\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{4\pi i}{5}} + e^{-\frac{6\pi i}{5}} + e^{-\frac{8\pi i}{5}}$$

جملات فوق تشکیل یک تصاعد هندسی با $q = e^{-\frac{2\pi i}{5}}$ می‌دهند که با جایگذاری در تعریف داریم:

$$S = \frac{(1)(1 - (e^{-\frac{2\pi i}{5}})^5)}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{5}}} = \frac{1 - e^{-2\pi i}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{5}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{5}}} = 0.$$